



RR-0631

First Year B. Sc./B.A. Examination

March / April – 2010

Mathematics : Paper - II

(Calculus & Differentiate Equations)

(Old Course)

Time : Hours]

[Total Marks : 105

સૂચના :

(૧)

નીચે દર્શાવેલ નિશાનીવાળી વિગતો ઉત્તરવહી પર અવશ્ય લખવી.  
Fillup strictly the details of signs on your answer book.

Name of the Examination :  
F. Y. B. Sc./ B. A.

Name of the Subject :  
Mathematics 2 (Old)

Subject Code No. : 0 6 3 1 Section No. (1, 2,.....): Nil

Seat No. :

Student's Signature

- (૨) બધા જ પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો.  
(૩) જમણી બાજુના અંક તે પ્રશ્નના ગુણ દર્શાવે છે.  
(૪) સામાન્ય સંકેતોને અનુસરો.

૧ નીચેના પ્રશ્નોનાં જવાબ આપો :

૧૫

(૧)  $y = x \log x$  હોય તો  $y_n$  શોધો.

(૨)  $f(x) = e^{1-x^2}$ ,  $x \in [-1, 1]$  માટે રોલનું પ્રમેય ચકાશો.

(૩)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\tan x}{\sec x}$  ની કિંમત શોધો.

(૪)  $y = x^2(x+2)$  વક્રની વક્રતા  $(0, 0)$  બિંદુએ શોધો.

(૫) સાબિત કરો કે વક્ર  $y = \log x$  હંમેશા અધઃઅંતર્ભુજ છે.

(૬)  $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^2 x dx$  ની કિંમત શોધો.

(૭) ઉકેલો :  $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$ .

(૮) જો  $z = x^3 + 3xy^2 + 3x^2y + y^3$  હોય તો  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  શોધો.

(૯)  $\sin x \frac{dy}{dx} + 4y \cos x = \cot x$  નો સંકલ્પકારક અવયવ શોધો.

(૧૦) ઉકેલો :  $y - x \frac{dy}{dx} = e^{\frac{dy}{dx}}$  .

૨ (અ) જો  $y = \log(ax + b)$  ;  $ax + b \in R^+$  હોય તો  $y_n$  શોધો અને  $\infty$   
તે પરથી  $y = \log(2x^2 + 5x + 3)$  માટે  $y_n$  શોધો.

(બ)  $y = \left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)^m$  હોય તો સાબિત કરો કે  $\infty$

$$\left(x^2 + a^2\right)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + \left(n^2 - m^2\right)y_n = 0$$

(ક) જો  $y = e^{2x} \cos^2 x \sin x$  હોય તો  $y_n$  શોધો.  $\infty$

**અથવા**

૨ (અ) જો  $y = e^{ax} \sin(bx + c)$  હોય તો  $y_n$  મેળવો અને તે પરથી  $\infty$   
 $y = e^{3x} \sin(4x + 1)$  માટે  $y_n$  શોધો.

(બ)  $y = e^{m \sin^{-1} x}$  હોય તો સાબિત કરો કે  $\infty$

$$\left(1 - x^2\right)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - \left(n^2 + m^2\right)y_n = 0$$

(ક) જો  $y = \frac{x^2 + 4x + 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$  હોય તો  $y_n$  શોધો.  $\infty$

૩ (અ) લાગ્રાન્જનું મધ્યકમાન પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો.  $\infty$

(બ)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \tan x}$  ની કિંમત શોધો.  $\infty$

(ક) સાબિત કરો કે  $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$   $\infty$

**અથવા**

- ૩ (અ) કોશીનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. ૬  
 (બ) સાબિત કરો કે ૬

$$\frac{a-b}{1+a^2} < \tan^{-1} a - \tan^{-1} b < \frac{a-b}{1+b^2}; (0 < a < b)$$

- (ક)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \log(1+x)}{x^2}$  ની કિંમત શોધો. ૬

- ૪ (અ)  $\int \sin^n x dx$  નું લઘુકરણ સૂત્ર મેળવો અને તે પરથી  $\int \sin^5 x dx$  મેળવો. ૬

- (બ)  $y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 5x + 7$  વક્રનાં વક્રતા-પરિવૃત્ત બિંદુઓ શોધો. ૬

- (ક) વક્ર  $y = \frac{x^2 - 5x + 10}{x - 3}$  નાં અનંત સ્પર્શકો શોધો. ૬

અથવા

- ૪ (અ) કોઈ પણ વક્ર  $y = f(x)$  માટે સાબિત કરો કે ૬

$$\text{વક્રતા } k = \frac{y_2}{(1 + y_1^2)^{3/2}}$$

- (બ) વક્ર  $y = 3x^5 - 40x^3 + 3x - 20$  કયા અંતરાલમાં ઊર્ધ્વ અંતર્ભુજ કે અધઃઅંતર્ભુજ બને છે તે શોધો. ૬

- (ક)  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^4}$  ની કિંમત શોધો. ૬

- ૫ (અ) સુરેખ વિકલ સમીકરણ લખો અને તેના ઉકેલ માટેની રીત વર્ણવો. ૬

- (બ) ઉકેલો :  $(2xy + y - \tan y)dx + (x^2 - x \tan^2 y + \sec^2 y)dy = 0$ . ૬

- (ક) ઉકેલો :  $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = xy^2$

અથવા

- ૫ (અ) વિકલ સમીકરણ  $Mdx + Ndy = 0$  યથાર્થ બને તે માટેની આવશ્યક અને પર્યાપ્ત શરત લખો અને સાબિત કરો. ૬
- (બ) ઉકેલો :  $(x^2 + y^2)(xdx + ydy) + (xdy - ydx) = 0$ . ૬
- (ક) ઉકેલો :  $(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + y = e^{\tan^{-1}x}$ . ૫
- ૬ (અ) વિકલ સમીકરણ  $f(x, y, p) = 0$ , જો  $p$  માટે ઉકેલનીય હોય તો તેને ઉકેલવાની રીત વર્ણવો. ૬
- (બ) ઉકેલો :  $y = 2px - \frac{1}{3}p^2$ . ૬
- (ક) ઉકેલો :  $\sin px \cos y = \cos px \sin y + p$ . ૬
- અથવા**
- ૬ (અ) લાગ્રાન્જનું વિકલ સમીકરણ લખો અને તેના ઉકેલ માટેની રીત વર્ણવો. ૬
- (બ) ઉકેલો :  $y = p \tan p + \log \cos p$ . ૬
- (ક) ઉકેલો :  $x^2(y - px) = yp^2$ . ૬

## ENGLISH VERSION

- Instructions :** (1) As per the instruction No. 1 of page no. 1.  
 (2) Answer all questions.  
 (3) Figures to the **right** indicate marks.  
 (4) Follow usual notations.

1 Answer the following questions : 15

- (1) If  $y = x \log x$  then find  $y_n$ .  
 (2) Verify Rolle's Theorem for the function

$$f(x) = e^{1-x^2}, \quad x \in [-1, 1]$$

- (3) Evaluate :  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\tan x}{\sec x}$ .

- (4) Obtain curvature of the curve  $y = x^2(x+2)$  at  $(0, 0)$ .

(5) Show that  $y = \log x$  is always concave downwards.

(6) Evaluate :  $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^2 x dx$ .

(7) Solve :  $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$ .

(8) If  $z = x^3 + 3xy^2 + 3x^2y + y^3$ , then find  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

(9) Find the integrating factor of  $\sin x \frac{dy}{dx} + 4y \cos x = \cot x$ .

(10) Solve :  $y - x \frac{dy}{dx} = e^{\frac{dy}{dx}}$ .

**2** (a) If  $y = \log(ax + b)$ ;  $ax + b \in R^+$  then find  $y_n$  and hence find  $y_n$  if  $y = \log(2x^2 + 5x + 3)$ . **6**

(b) If  $y = \left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)^m$ , then prove that **6**

$$(x^2 + a^2)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2 - m^2)y_n = 0.$$

(c) If  $y = e^{2x} \cos^2 x \sin x$ , then find  $y_n$ . **6**

**OR**

**2** (a) If  $y = e^{ax} \sin(bx + c)$ , then find  $y_n$ . Using it obtain  $y_n$  for  $y = e^{3x} \sin(4x + 1)$ . **6**

(b) If  $y = e^{m \sin^{-1} x}$ , then prove that **6**

$$(1 - x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2 + m^2)y_n = 0$$

(c) If  $y = \frac{x^2 + 4x + 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$ , then find  $y_n$ . **6**

- 3 (a) State and prove Lagrange's Mean-Value theorem. 6
- (b) Evaluate :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \tan x}$ . 6
- (c) Prove that  $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$  6

**OR**

- 3 (a) State and prove Cauchy's theorem. 6
- (b) Prove that : 6

$$\frac{a-b}{1+a^2} < \tan^{-1} a - \tan^{-1} b < \frac{a-b}{1+b^2}; (0 < a < b)$$

- (c) Evaluate :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - \log(1+x)}{x^2}$ . 6
- 4 (a) Obtain the reduction formula for  $\int \sin^n x dx$  and 6

hence evaluate  $\int \sin^5 x dx$ .

- (b) Find the point of inflexion for the curve 6
- $$y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 5x + 7$$
- (c) Find asymptotes for the curve  $y = \frac{x^2 - 5x + 10}{x - 3}$ . 6

**OR**

- 4 (a) For any curve  $y = f(x)$ , prove that 6

$$\text{curvature } k = \frac{y_2}{(1 + y_1^2)^{3/2}}$$

- (b) Obtain the intervals in which the curve 6

$y = 3x^5 - 40x^3 + 3x - 20$  is concave upward or concave downward.

- (c) Evaluate :  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^4}$ . 6

- 5 (a) State Linear Differential Equation and explain the method to solve it. 6
- (b) Solve :  $(2xy + y - \tan y)dx + (x^2 - x \tan^2 y + \sec^2 y)dy = 0$ . 6
- (c) Solve :  $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = xy^2$ .

**OR**

- 5 (a) State and prove the necessary and sufficient condition for the differential equation  $Mdx + Ndy = 0$  to be exact. 6
- (b) Solve :  $(x^2 + y^2)(xdx + ydy) + (xdy - ydx) = 0$ . 6
- (c) Solve :  $(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + y = e^{\tan^{-1}x}$ . 5
- 6 (a) Explain the method to obtain general solution of the differential equation  $f(x, y, p) = 0$ , if it is solvable for p. 6
- (b) Solve :  $y = 2px - \frac{1}{3}p^2$ . 6
- (c) Solve :  $\sin px \cos y = \cos px \sin y + p$ . 6

**OR**

- 6 (a) State Lagrange's differential equation and explain the method to solve it. 6
- (b) Solve :  $y = p \tan p + \log \cos p$ . 6
- (c) Solve  $x^2(y - px) = yp^2$ . 6

---